**Матрица 1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  | | --- | --- | | 2 | 2 | | 1 | 3 | |  | |  |

Составляем систему для определения координат собственных векторов:   
(2 - λ)x1 + 2x2 = 0   
1x1 + (3 - λ)x2 = 0   
Составляем характеристическое уравнение и решаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  | | --- | --- | | 2 - λ | 2 | | 1 | 3 - λ | |  | |  |

Для этого находим определитель матрицы и приравниваем полученное выражение к нулю.   
((2 - λ) • (3 - λ)-1 • 2) = 0   
После преобразований, получаем:   
λ2 -5 λ + 4 = 0   
D=(-5)2 - 4·1·4=9   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\lambda%20_%7b1%7d%20=%20\frac%7b-(-5)%2B3%7d%7b2\cdot%201%7d%20=%204  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\lambda%20_%7b2%7d%20=%20\frac%7b-(-5)-3%7d%7b2\cdot%201%7d%20=%201  
-2x1 + 2y1 = 0   
1x1-1y1 = 0   
Собственный вектор, отвечающий числу λ1 = 4 при x1 = 1:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\overline%7bx_%7b1%7d%7d=(1,%201).  
В качестве единичного собственного вектора принимаем вектор:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\overline%7bi%7d_%7b1%7d%20=%20(\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d;%20\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d)  
где   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\sqrt%7b1%5e%7b2%7d%20%2B%201%5e%7b2%7d%7d%20=%20\sqrt%7b2%7d  
длина вектора x1.   
или   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\overline%7bi%7d_%7b1%7d%20=%20(\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d;%20\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d)  
Координаты второго собственного вектора, соответствующего второму собственному числу λ2 = 1, находим из системы:   
1x1 + 2y1 = 0   
1x1 + 2y1 = 0   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\overline%7bx_%7b2%7d%7d=(2,%20-1).  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\overline%7bj%7d_%7b1%7d%20=%20(\frac%7b2%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d;%20\frac%7b-1%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d)  
или   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\overline%7bj%7d_%7b1%7d%20=%20(\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d;%20-\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b2%7d%7d)

**Матрица 2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 4 | 1 | -1 | | 1 | 4 | -1 | | -1 | -1 | 4 | |  | |  |

Составляем систему для определения координат собственных векторов:   
(4 - λ)x1 + 1x2-1x3 = 0   
1x1 + (4 - λ)x2-1x3 = 0   
-1x1-1x2 + (4 - λ)x3 = 0   
Составляем характеристическое уравнение и решаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 4 - λ | 1 | -1 | | 1 | 4 - λ | -1 | | -1 | -1 | 4 - λ | |  | |  |

Для этого находим определитель матрицы и приравниваем полученное выражение к нулю.   
(4 - λ) • ((4 - λ) • (4 - λ)-(-1 • (-1)))-1 • (1 • (4 - λ)-(-1 • (-1)))+(-1 • (1 • (-1)-(4 - λ) • (-1))) = 0   
После преобразований, получаем:   
-λ3+12\*λ2-45\*λ+54 = 0   
λ1 = 6   
Подставляя λ1 = 6 в систему, имеем:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 4 - 6 | 1 | -1 | | 1 | 4 - 6 | -1 | | -1 | -1 | 4 - 6 | |  | |  |

или

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | -2 | 1 | -1 | | 1 | -2 | -1 | | -1 | -1 | -2 | |  | |  |

Решаем эту систему линейных однородных уравнений.   
Выпишем основную матрицу системы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **-2** | **1** | **-1** | | **1** | **-2** | **-1** | | **-1** | **-1** | **-2** | | x1 | x2 | x3 | |  | |  |

Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы.   
Умножим 2-ую строку на (2). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 0 | -3 | -3 | | 1 | -2 | -1 | | -1 | -1 | -2 | |  | |  |

Добавим 3-ую строку к 2-ой:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 0 | -3 | -3 | | 0 | -3 | -3 | | -1 | -1 | -2 | |  | |  |

В матрице *B* 1-ая и 2-ая строки пропорциональны, следовательно, одну из них, например 1-ю, можно вычеркнуть. Это равносильно вычеркиванию 1-го уравнения системы, так как оно является следствием 2-го.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **0** | **-3** | **-3** | | **-1** | **-1** | **-2** | |  | |  |

Найдем ранг матрицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **0** | **-3** | -3 | | **-1** | **-1** | -2 | |  | |  |

Выделенный минор имеет наивысший порядок (из возможных миноров) и отличен от нуля (он равен произведению элементов, стоящих на обратной диагонали), следовательно rang(A) = 2.   
Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных x1,x2, значит, неизвестные x1,x2 – зависимые (базисные), а x3 – свободные.   
Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **0** | **-3** | 3 | | **-1** | **-1** | 2 | |  | |  |

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:   
- 3x2 = 3x3   
- x1 - x2 = 2x3   
Методом исключения неизвестных находим **нетривиальное решение**:   
Получили соотношения, выражающие зависимые переменные x1,x2 через свободные x3, то есть нашли **общее решение**:   
x2 = - x3   
x1 = - x3   
Множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ1 = 6, имеет вид:   
(1x3,1x3,-1x3) = x3(1,1,-1)   
где x3 - любое число, отличное от нуля. Выберем из этого множества один вектор, например, положив x3 = -1:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\overline%7bx_%7b1%7d%7d%20=%20(1,1,-1)  
λ2 = 3   
Подставляя λ2 = 3 в систему, имеем:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 4 - 3 | 1 | -1 | | 1 | 4 - 3 | -1 | | -1 | -1 | 4 - 3 | |  | |  |

или

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 1 | 1 | -1 | | 1 | 1 | -1 | | -1 | -1 | 1 | |  | |  |

Решаем эту систему линейных однородных уравнений   
Выпишем основную матрицу системы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **1** | **1** | **-1** | | **1** | **1** | **-1** | | **-1** | **-1** | **1** | | x1 | x2 | x3 | |  | |  |

Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы.   
В матрице *B* 1-ая и 2-ая строки пропорциональны, следовательно, одну из них, например 1-ю, можно вычеркнуть. Это равносильно вычеркиванию 1-го уравнения системы, так как оно является следствием 2-го.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **1** | **1** | **-1** | | **-1** | **-1** | **1** | |  | |  |

Добавим 2-ую строку к 1-ой:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 0 | 0 | 0 | | -1 | -1 | 1 | |  | |  |

В матрице *B* 1-ая строка нулевая, следовательно, вычеркиваем ее. Это равносильно вычеркиванию 1-го уравнения системы.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | -1 | -1 | 1 | |  | |  |

Найдем ранг матрицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | -1 | -1 | 1 | |  |  |  | |  | |  |

Выделенный минор имеет наивысший порядок (из возможных миноров) и отличен от нуля (он равен произведению элементов, стоящих на обратной диагонали), следовательно rang(A) = 1.   
Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных , значит, неизвестные – зависимые (базисные), а x1,x2,x3 – свободные.   
Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 1 | 1 | -1 | | x1 | x2 | x3 | |  | |  |

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:   
x = x2 - x3   
Получили соотношения, выражающие зависимые переменные через свободные x1,x2,x3, то есть нашли **общее решение**:   
x = x2 - x3   
Находим фундаментальную систему решений, которая состоит из (n-r) решений.   
В нашем случае n=3, r=1, следовательно, фундаментальная система решений состоит из 2-х решений, причем эти решения должны быть линейно независимыми.   
Чтобы строки были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из элементов строк, был равен количеству строк, то есть 2.   
Достаточно придать свободным неизвестным x1,x2,x3 значения из строк определителя 2-го порядка, отличного от нуля, и подсчитать .   
Простейшим определителем, отличным от нуля, является единичная матрица.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  | | --- | --- | | 1 | 0 | | 0 | 1 | |  | |  |

Множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ2 = 3, имеет вид:   
(1x1,x2,x3,0x1,x2,x3,1x1,x2,x3) = x1,x2,x3(1,0,1)   
где x1,x2,x3 - любое число, отличное от нуля. Выберем из этого множества один вектор, например, положив x1,x2,x3 = 2: